Resumo 0

págs: **1:1** ISBN:

NÚMEROS POLIGONAIS

Prof. Dr. João Bosco Laudares

PUC Minas e CEFET- MG

matematica@pucminas.br

Maria Auxiliadora Lage Moura

Mestrado em Ensino de Matemática – PUC Minas
Fundação de Ensino Superior de Itabira - FUNCESI

mauxiliadoramoura@yahoo.com.br

Resumo: Este trabalho tem por objetivo realizar um estudo sobre os números poligonais, tema em evidência em diversos livros didáticos de ensino fundamental e médio. Objetiva também fornecer material para consulta de professores dos vários níveis de ensino como forma de enriquecer o conteúdo, pois o tema oferece várias possibilidades de exploração, podendo ser proposto desde as séries iniciais, para o estudo das operações de adição e subtração, no ensino fundamental, e, no ensino médio, para o estudo de seqüências numéricas, polinômios, funções, progressão aritmética e análise combinatória, permitindo estabelecer conexões entre os diversos conteúdos citados. Sua forma de representação geométrica pelo tratamento algébrico, o qual contribui para evidenciar os processos matemáticos de cálculo, pode ser explorada na geração de modelos matemáticos, e também explorada com a utilização de material concreto ou de software matemático, como o Cabri-Gèométre.

Palavras-chave: *Números poligonais, material didático, representação geométrica, modelo matemático.*

1. INTRODUÇÃO

Este texto objetiva fornecer subsídios à metodologia dos professores de matemática privilegiando a interdisciplinaridade da álgebra, da aritmética com a geometria pela abordagem dos números poligonais, através da sua representação geométrica e de propriedades aritméticas e algébricas, originadas de análise das figuras geométricas, que representam tais números.

Serão beneficiados professores dos vários níveis de ensino pois o tema oferece várias possibilidades de exploração, podendo ser proposto desde as séries iniciais,para auxiliar o estudo das operações de adição e subtração, no ensino fundamental, e, no ensino médio oferecer suporte para o estudo de seqüências numéricas, polinômios, funções, progressão aritmética e análise combinatória, permitindo estabelecer conexões entre os diversos conteúdos citados. Sua forma de representação geométrica pelo tratamento algébrico, o qual contribui para evidenciar os processos matemáticos de cálculo, pode ser explorada na geração de modelos matemáticos, e também explorada com a utilização de material concreto ou de software matemático, como o Cabri-Gèométre.

2. CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

No livro *Fundamentos de Matemática Elementar, CARAÇA* salienta a necessidade do homem fazer contagem a todo instante e afirma que se o mesmo vivesse isolado talvez a necessidade de contagem reduziria, mas não totalmente. Assim, à medida que a vida social se intensifica a contagem se impõe como uma necessidade cada vez maior e urgente Nessa perspectiva, o autor faz um incursão pela história e discorre sobre o surgimento dos números.

> *A idéia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. (CARAÇA, 2003)*

O mesmo autor coloca que sobre Pitágoras, tem-se que:

> *A partir do século VI a.C., existiu e exerceu larga influência na Grécia uma seita, de objetivos místicos e científicos, denominada escola pitagórica, dela parece ter sido Pitágoras o fundador. Será sempre um conjunto de idéias que caracterizavam essa seita que nos referiremos quando empregarmos o nome de Pitágoras (CARAÇA, 2003).*

Os pitagóricos adoravam os números e acreditavam que tudo no universo era número, pois nada se podia fazer sem o auxilio deles; porém, conheciam apenas os números inteiros e os números fracionários e, como gostavam de representar quantidades como arranjo de formas harmoniosas, descobriram muitos padrões numéricos.

> *A representação geométrica ou física de números por pontos ou (seixos) em um plano e a investigação de suas propriedades eram um estudo natural para os antigos pitagóricos. Casos especiais desses números poligonais, números cuja representação geométrica assumia a forma de vários polígonos (GUNDLACH, 1992)*

Sobre estes números, *GUNDLACH* (1992) afirma que a discussão mais completa foi dada por um grego, Nicômaco de Gerasa (100 a.C.), em sua ***Introdução Arthimética,*** cujo manuscrito mais antigo nos remonta ao século X. O estudioso apresenta seu material em forma de definições e afirmações de princípios gerais, com explanações e muita ilustrações.

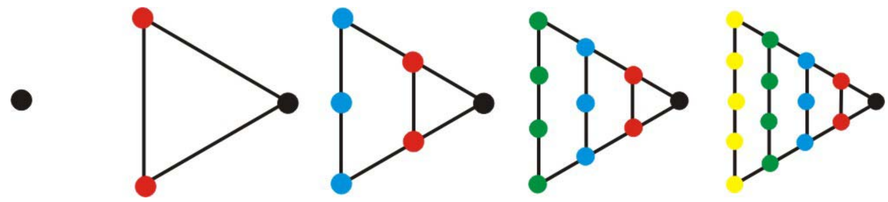
3. NÚMERO POLIGONAL

Um número poligonal é um número que pode ser representado por um arranjo geométrico regular de pontos igualmente espaçados. Se o arranjo der forma a um polígono regular, o número é chamado de número poligonal, ou seja, um número que pode ser arranjado como um polígono regular. Os matemáticos antigos descobriram que os números poderiam ser arranjados em determinadas maneiras quando foram representados por pedras, seixos ou por sementes. Serão apresentados alguns tipos de números poligonais.

É apresentado um estudo dos números poligonais: triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais.

4. NÚMEROS TRIANGULARES

Um número triangular, notado por T_n, é um número figurado que pode ser representado por uma grade triangular dos pontos onde a primeira fileira contém um único elemento e cada fileira subseqüente contém um elemento a mais do que a precedente. Os números triangulares estão representados geometricamente pelos padrões a seguir:



1 3 6 10 15

$T_1 = 1$	$T_1 = 1$
$T_2 = 1+2$	$T_2 = 3$
$T_3 = 1+2+3$	$T_3 = 6$
$T_4 = 1+2+3+4$	$T_4 = 10$
$T_5 = 1+2+3+4+5$	$T_5 = 15$
$\vdots$	$\vdots$
$T_n = 1+2+3+4+\cdots+n$	$T_n = \dfrac{n^2+n}{2}$

Fig 1 – Números triangulares

Verifica-se que o número de pontos em cada uma destas formações triangulares é, evidentemente, a soma dos termos de uma progressão aritmética. Assim, os primeiros números triangulares são 1, 3, 6, 10 ...

Como um número triangular é um número obtido, adicionando-se todos os inteiros positivos até o do n-ésimo termo logo, a soma parcial de *n* termos da progressão aritmética: 1, 2, 3, 4, 5 ...T_n representa o número triangular.

A soma de "*n*" termos de uma PA é dada por $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$, tomando a PA:

1, 2, 3,

4, 5 ... $n \rightarrow S_n = T_n = \dfrac{n(1+n)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$, que é a fórmula geral dos números triangulares.

Uma propriedade interessante é:

1º. Se somarmos a unidade com oito vezes um número triangular, obtemos o quadrado de um número ímpar (dado por Plutarco 100 a. C.) e Diofanto (250d. C.)

I. Um número ímpar é da forma: $2n+1$

II. Seu quadrado é: $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

III. Um número triangular é da forma: $T_n = \dfrac{n^2+n}{2}$

IV. Tomando-se

$$1+8T_n = 1+8\cdot\frac{n^2+n}{2} = 1+4\left(n^2+n\right) = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

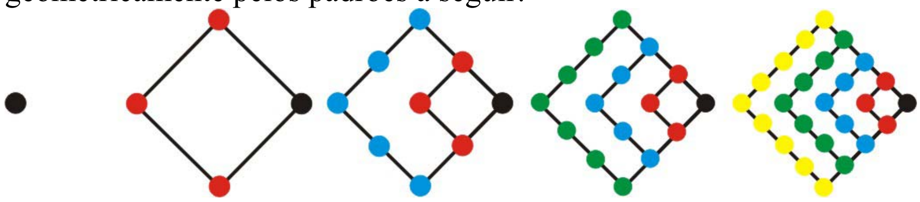
Por exemplo se tomarmos $n=5$, então: $(2\cdot 5+1)^2 = 11^2$

Pela representação geométrica temos um quadrado de lado 11 formado por 8 triângulos T_5 mais um ponto no centro, que representa a unidade (1).

Fig 2 - $1+8T_5 = 11^2$

5. NÚMEROS QUADRADOS

Um número quadrado, chamado também quadrado perfeito pode ser representado por uma grade quadrada de pontos e podem ser representados geometricamente pelos padrões a seguir:



1 4 9 16 25

Fig 3 – Números quadrados

$Q_1 = 1$ ———— $Q_1 = 1$

$Q_2 = 1+3$ ———— $Q_2 = 4$

$Q_3 = 1+3+5$ ———— $Q_3 = 9$

$Q_4 = 1+3+5+7$ ———— $Q_4 = 16$

$\vdots$ $\vdots$

$Q_n = 1+3+5+7+\cdots+n$ ———— $Q_n = n^2$

O número de pontos em cada uma dessas formações quadradas é, também, a soma dos termos de uma progressão aritmética. Assim, os primeiros números quadrados são: 1, 4, 9, 16, 25 ...

A seqüência de números quadrados possui também algumas propriedades expostas a seguir:

Cada número quadrado equivale a soma parcial dos números da progressão aritmética que é a seqüência dos números ímpares consecutivos: $1+3+5+7+9+\cdots+2n-1$

Tomando a soma dos termos da P.A. $1+3+5+7+9+\cdots+2n-1$, teremos

$$S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = \frac{n+2n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Sendo então $T_n = n^2$ a fórmula geral dos números quadrados.

Duas propriedades com números triangulares são:

1º. Dois números triangulares consecutivos formam um quadrado perfeito:

Por exemplo, tomando $T_6 + T_7 = 7^2$ geometricamente é um quadrado composto de dois triângulos: T_6 e T_7.

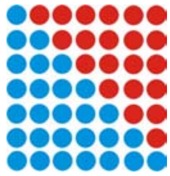


Figura 4 – Dois números triangulares consecutivos formam um quadrado perfeito, no exemplo $T_6 + T_7$

Que pode ser demonstrado como segue:

$$\begin{array}{lcl}
T_n & \longrightarrow & 1+2+3+4+5+6+\cdots+n \\
+ & & + \;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\;\;\vdots \\
\underline{T_n - 1} & & \underline{1+2+3+4+5+\cdots+n-1} \\
n^2 & \longrightarrow & 1+3+5+7+9+11+\cdots+2n-1
\end{array}$$

Isto é, $T_{n-1} + T_n = n^2$

Ou ainda,

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n(1+n)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+n+2)}{2} = (n+1)^2$$

Ou seja: A soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado perfeito.

2º. Os números 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900 são denominados: números “triangulares quadrados”, isto é, estes números são simultaneamente triangulares e quadrados (PIETENPOL, 1962)

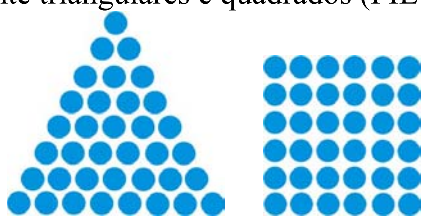


Fig 5 – 36 é número triangular e quadrado

As propriedades dos números quadrados e triangulares fascinaram Pitágoras. Por exemplo o número 4 equivale a soma de dois números ímpares, 1 + 3 e o número 9 equivale a soma dos três primeiros números ímpares, 1+ 3 + 5 , e assim por diante .

> *Enquanto que os números quadrados são todos iguais à soma de todos os números ímpares consecutivos, Pitágoras percebeu que, do mesmo modo, os números triangulares são as somas de todos os números consecutivos, tanto pares como ímpares. E que os números quadrados e triangulares estão relacionados; se adicionarmos um número triangular anterior ou ao próximo, obteremos um número quadrado (MLODINOW, 2004).*

6. NÚMEROS PENTAGONAIS

Os números pentagonais são números figurados que representam pentágonos e podem ser expressos conforme figura abaixo.

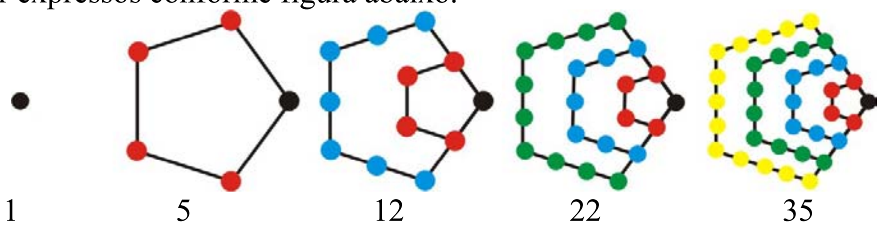


Fig 6 – Números pentagonais

A soma parcial de n termos da Progressão Aritmética:

$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + (3n - 2)$, resulta num número pentagonal, e a sua soma fornece a fórmula geral dos números pentagonais: $s_n = \frac{n(1+3n-2)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

Algumas propriedades podem ser facilmente comprovadas:

1º. Verifica-se que: $P_n = 3T_{n-1} + n$. Sabendo-se que o número triangular T_n é dado por $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, então:

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)\,(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)\cdot n}{2} \text{ donde } P_n = 3T_{n-1} + n \text{ será:}$$

$$P_n = 3\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} + n = \frac{(3n-3)\cdot n + n}{2} = \frac{n[3n-3+1]}{2} = \frac{n(3n-2)}{2}$$

$P_1 = 1$	$P_1 = 1$
$P_2 = 1 + 4$	$P_2 = 5$
$P_3 = 1 + 4 + 7$	$P_3 = 12$
$P_4 = 1 + 4 + 7 + 10$	$P_4 = 22$
$\vdots$	$\vdots$
$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 2$	$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

Para ilustrar, tomemos $n = 10$. A soma dos dez primeiros termos da progressão aritmética é $S_{10} = \frac{10(3\cdot 10 - 1)}{2} = 145$ que é o décimo número pentagonal.

Por exemplo se fizermos $n = 5$, teremos 3(três) triângulos T_4 mas 5 (cinco) pontos, representados por azul na figura:

Fig 7- Forma pentagonal básica $P_n = 3T_{n-1} + n$, apresentada por *GUNDLACH, 1992.*

2º. A segunda forma não enfatiza a forma pentagonal, mas ilustra a relação $P_n = Q_n + T_{n-1}$.

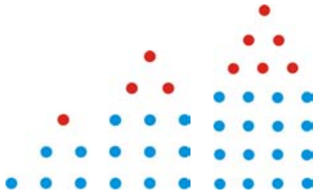
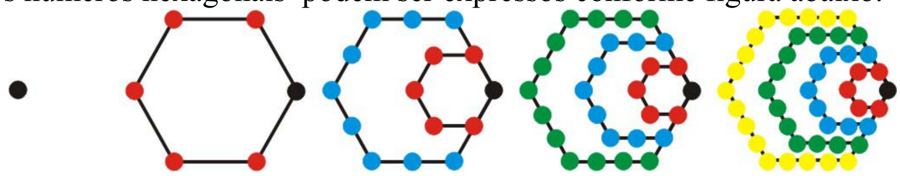


Fig 8. Segunda forma $P_n = Q_n + T_{n-1}$ apresentada por *GUNDLACH, 1992*

7. NÚMEROS HEXAGONAIS

Os números hexagonais podem ser expressos conforme figura abaixo.



1 5 9 13 17

Fig 9 – Números hexagoanis

A série de números hexagonais é tal que qualquer número é a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 4, como a seguir: 1, 5, 9, 13 … 4*n* - 3

Uma vez que n-ésimo termo da progressão aritmética acima é 3n – 2, a soma dos primeiros n termos é: $S_n = \dfrac{n(1+4n-3)}{2} = \dfrac{4n^2-2n}{2}$ *ou* $H_n = n(2n-1)$.

CONWAY (1996), apresenta mais duas propriedades dos números hexagonais:

1º. $H_n = 3T_{n-1} + T_n = n(2n-1)$

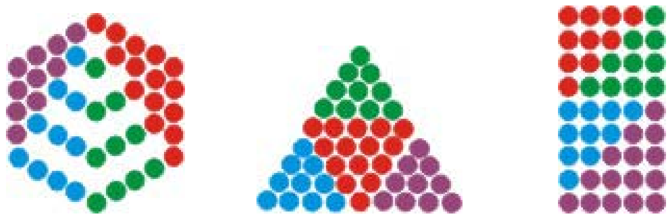


Figura 10

2º. $H_n = 1 + 6T_{n-1} = 1 - 3n + 3n^2$

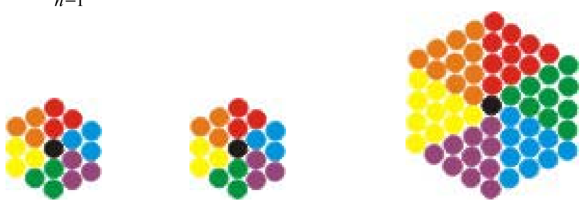


Figura 11

Generalizando, são realizados algumas considerações e apresentados modelos algébricos para os números poligonais.

GUNDLACH, (1992) afirma que, seguindo a tradição dos pitagóricos, Nicômaco não considera a unidade ou 1, como um número. Ele faz a seguinte afirmação: “ A unidade pode parecer, potencialmente um triângulo, e 3 é o primeiro realmente”. Do mesmo modo, a unidade é potencialmente, um quadrado, um número pentagonal e assim por diante.

Em seu clássico *Arithmética,* o grego Diofanto (250 d. C.) também escreveu sobre os números poligonais, do qual só um fragmento é conhecido. Ele propôs o seguinte problema : “ Dado um número, achar de quantas maneiras ele pode ser um número poligonal”

Triangular	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Quadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

Consultando a tabela construída por Nicômaco, podemos notar que 36 é um número triangular e quadrado; 55 é é triangular e heptagonal e 81 é um número quadrado e heptagonal.

Podemos generalizar os números poligonais, com uma fórmula que se aplica a polígonos de qualquer número k de lados. As séries de números poligonais são infinitas, mas podemos determinar qualquer um de seus termos por meio de simples substituições. Para deduzirmos a fórmula, basta perceber que as seqüência de números poligonais formam uma progressão aritmética. A tabela 1 mostra o fato com clareza.

Número poligonal	Soma dos termos de uma seqüência numérica	Termo Geral: A_n $a_n = a_1 + (n-1)\,r$	Soma dos termos: $S_n = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot n$
Triangular	S_n= 1+2+3+4+...+ n	$a_n = n$	$S_n = \frac{1}{2}(n^2 + n) \therefore T_3 = \frac{1}{2}(n^2 = n)$
Quadrado	S_n= 1+3+5+7+...+ 2n-1	$a_n = 2n - 1$	$S_n = n^2 \therefore \; T_4 = \cdots$
Pentagonal	S_n= 1+4+7+10+...+ 3n-2	$a_n = 3n - 2$	$S_n = \frac{1}{2}(3n^2 - n) \;\therefore\; p_5 = \cdots$
Hexagonal	S_n= 1+5+9+13+...+ 4n-3	$a_n = 4n - 3$	$S_n = 2n^2 - n \;\therefore\; H_6 = \cdots$
Heptagonal	S_n= 1+6+11+16+...+ 5n-4	$a_n = 5n - 4$	$S_n = \frac{1}{2}(5n^2 - 3n) \;\therefore\; H_7 = \cdots$
Octagonal	S_n= 1+7+13+19+...+ 6n-5	$a_n = 6n - 5$	$S_n = 3n^2 - 2n \;\therefore\; O_8 = \cdots$
Nonagonal	S_n= 1+8+15+23+...+ 7n-6	$a_n = 7n - 6$	$S_n = \frac{1}{2}(7n^2 - 5n) \;\therefore\; N_9 = \cdots$
Decagonal	S_n= 1+9+17+25+...+ 8n-7	$a_n = 8n - 7$	$S_n = \frac{1}{2}(8n^2 - 6n) \;\therefore\; D_{10} = \cdots$
k- gonal	$S_n = 1 + (k-1) + [(k-1) + r] + \ldots + a = (k-2)n - (k-3)$	$a_n = (k-2)n - (k-3)$	$S_k^n = \frac{n}{2}[2 + (k-2)(n-1)] \;\therefore\; P_k = \cdots$

Tabela 1 – Números poligonais de k lados

GUNDLACH (1992) cita que, embora a generalização não apareça no trabalho de Nicômaco, atribui-se a Hipsicles (180ª. C.) o resultado (aqui enunciado de forma moderna) de que o n-ésimo número K-gonal é dado por:

$$P_k^n = S_k^n = \frac{n}{2}[2 + (n-1)(k-2)] = n + \frac{n(n-1)}{2}(k-2)$$

Podemos checar a fórmula acima, com resultados já obtidos.

Assim para a série de números triangulares, k = 3, de modo que o n-ésimo termo da série é $P_3^n = n + \frac{n(n-1)}{2}(3-2) = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$, como já foi determinado.

Determinou-se, anteriormente, que o décimo termo da série de números pentagonais é 145. Introduzindo n=10 e k=5 na fórmula $P_r^n = \frac{n}{2}[2+(n-1)(k-2)]$, obtemos:

$$P_2^{10} = \frac{10}{2}[2+(10-1)(5-2)] = 5(2+9.3) = 5(29) = 145.$$

Os enunciados a seguir são atribuídos a Pierre de Fermat (1601-1665), que foi na verdade, advogado francês que perseguiu a matemática de forma amadora; seu trabalho na teoria do número era de tal qualidade que ele foi considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Fermat descobriu que existe uma relação simples entre a série de números poligonais e todos os números naturais. HUNTLTLEY (1995) apresenta essas relações em uma série de afirmações :

i. Todo número triangular ou é a soma de dois ou de três números triangulares.
ii. Todo número quadrado ou é a soma de dois, três ou quatro números quadrados.
iii. Todo número pentagonal ou é a soma de dois, três, quatro ou cinco números pentagonais
iv. Todo número hexagonal ou é a soma de dois, três, quatro, cinco ou seis números hexagonais.

9. CONCLUSÃO

Os números poligonais têm sido estudados ao longo dos tempos por vários matemáticos. Sua representação inicial foi geométrica ou física, por pontos ou seixos, sendo exploradas as definições e afirmações baseadas na aritmética. Depois, foram introduzidos os simbolismos algébricos para expressar ou demonstrar vários resultados das regularidades observadas.

Coerente com este desenvolvimento histórico dos números poligonais, neste texto foi realizada uma abordagem metodológica privilegiando a integração do tratamento do conteúdo estudado utilizando a aritmética, quando se trabalhou a sequência dos números, a álgebra quando foi determinada uma fórmula geral, isto é, um modelo para o cálculo dos números poligonais e, com destaque foi realizada a representação geométrica, a qual ilustra e subsidia o entendimento conceitual e das propriedades dos vários tipos de números poligonais.

Com este estudo, foi possível observar a presença de vários processos matemáticos envolvidos como: a procura de regularidades e invariantes, a generalização, a formalização, a abstração, a comunicação de idéias matemáticas, a modelagem e a demonstração que necessitam ser evidenciados para que o aluno se conscientize de sua aprendizagem.

A exploração dos números poligonais é uma excelente atividade de investigação matemática, que pode ser levada para a sala de aula desde as séries iniciais do ensino fundamental. Estudantes que já têm uma boa noção de progressão aritmética, terão por meio dessa exploração, maior poder de argumentação na validação das conjecturas levantadas. Sua exploração permitirá uma boa conexão entre os conteúdos estudados, contribuindo de forma positiva para melhor apropriação dos conceitos e uma conseqüente aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS:

BOYER, C. B. **História da Matemática**, tradução Elza F. Gomide- 2.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus.Conceitos fundamentais da matemática. 5. ed.. Lisboa: Gradativa , 2003

CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **The book of numbers**. New York, NY: Copernicus, 1996.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** (1º grau). Volume 5. .São Paulo: Editora Ática, 2003.

DAVIS, P. J. HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradativa , 1995

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais**, tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992 (tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, V, 1)

HUNTLTLEY, H.E. **A Divina Proporção**.Brasília: Editora Universidade de Brasília. 1995.

ENZENSBERG, H. M. **O Diabo dos Números**. São Paulo: Companhia das Letras, 1997

ERNEST,P..Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, LEAL, PONTE (Eds). **Investigar para aprender matemática**, (PP.25 – 48). Lisboa: Projeto MPT e APM, 1996.

FROTA, Maria Clara R. **Experiência Matemática e Investigação Matemática.**

IMENES, L. M. e LELLIS,M**.** **Matemática** (1º grau). Volume 5. São Paulo: Editora Scipione , 1997

MLODINOW, L.. **A Janela de Euclides**: história da geometria: duas linhas paralelas ao hiperespaço - São Paulo: Geração Editorial, 2004.

PIETENPOL, J. L .**Números Triangulares Quadrados**. *Amer. Math. 169* **mensais** , 168-169, 1962 in, http://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html

PONTE, João Pedro da et al. **Investigações matemáticas na sala de aula** – Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P . **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat 2003(CD-Rom, pp 25- 39) Lisboa: APM, 2003.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo, 2ª reimpressão – Rio de Janeiro:Interciência, 1995.