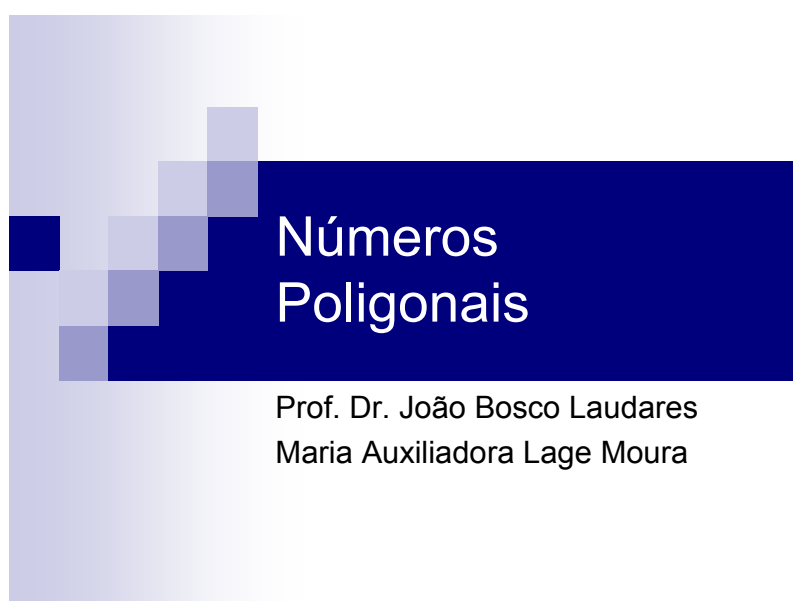


Palestra: Números Poligonais

Maria Auxiliadora Lage Moura

Mestrado em Ensino de Matemática PUC – Minas
Professora do ISEI – FUNCESI

Público-alvo: Professores de Ensino Fundamental e Médio e Alunos de Licenciatura
Endereço eletrônico: mauxiliadoramoura@yahoo.com.br



Números poligonais

- *Este texto objetiva fornecer subsídios à metodologia dos professores de matemática privilegiando a interdisciplinaridade da álgebra, da aritmética com a geometria pela abordagem dos números poligonais, através da sua representação geométrica e de propriedades aritméticas e algébricas, originadas de análise das figuras geométricas, que representam tais números.*



CARAÇA, 2003

- *A idéia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens.*
- *A partir do século VI a.C., existiu e exerceu larga influência na Grécia uma seita, de objetivos místicos e científicos, denominada escola pitagórica, dela parece ter sido Pitágoras o fundador. Será sempre um conjunto de idéias que caracterizavam essa seita que nos referiremos quando empregarmos o nome de Pitágoras*



Gundlach, 1992

- *A representação geométrica ou física de números por pontos ou (seixos) em um plano e a investigação de suas propriedades eram um estudo natural para os antigos pitagóricos. Casos especiais desses números poligonais, números cuja representação geométrica assumia a forma de vários polígonos.*

Números triangulares

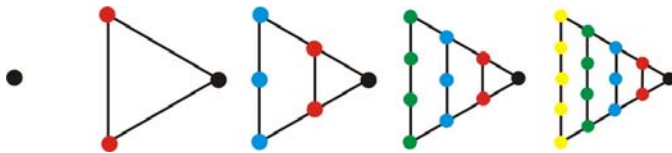


Fig 1 – Números triangulares

$T_1 = 1$	$T_1 = 1$
$T_2 = 1 + 2$	$T_2 = 3$
$T_3 = 1 + 2 + 3$	$T_3 = 6$
$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$	$T_4 = 10$
$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$T_5 = 15$
\vdots	\vdots
$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$	$T_n = \frac{n^2 + n}{2}$

Números triangulares

- Se somarmos a unidade a oito vezes um número triangular, obtemos o quadrado de um número ímpar (dado por Plutarco 100 a. C.) e Diofanto (250d. C.)



Fig 2 $1 + 8T_5 = 11^2$

Números quadrados

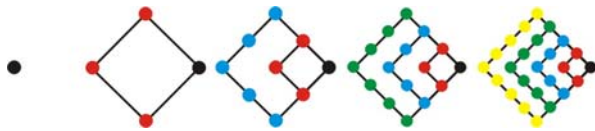


Fig 3 – Números quadrados

$Q_1 = 1$	-----	$Q_1 = 1$
$Q_2 = 1 + 3$	-----	$Q_2 = 4$
$Q_3 = 1 + 3 + 5$	-----	$Q_3 = 9$
$Q_4 = 1 + 3 + 5 + 7$	-----	$Q_4 = 16$
\vdots		\vdots
$Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n$	-----	$Q_n = n^2$

Propriedade dos números quadrados

- A soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado perfeito.

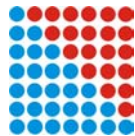


Figura 4 – Dois números triangulares consecutivos formam um quadrado perfeito.

Que pode ser demonstrado como segue:

$$\begin{array}{r}
 T_n \qquad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + n \\
 + \qquad + \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \hline
 \frac{T_n - 1}{n^2} \qquad \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n - 1}{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 2n - 1}
 \end{array}$$



Números quadrados

- Os números 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900 são os números triangulares quadrados, isto é, os números que são simultaneamente triangulares e quadrados. (Pietenpol 1962)

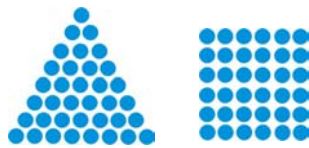


Fig 5 – 36 é número triangular e quadrado



Números pentagonais

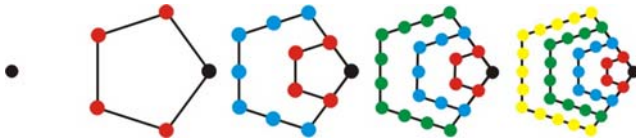


Fig 6 – Números pentagonais

$P_1 = 1$	-----	$P_1 = 1$
$P_2 = 1 + 4$	-----	$P_2 = 5$
$P_3 = 1 + 4 + 7$	-----	$P_3 = 12$
$P_4 = 1 + 4 + 7 + 10$	-----	$P_4 = 22$
\vdots		\vdots
$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 3n - 2$	-----	$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

Números pentagonais

- Os pentagonais $P_1= 1, P_2= 5, P_3= 12, \dots$ têm sido representados fisicamente de duas outras formas, como se vê nas figuras abaixo:



Fig 7- Forma pentagonal básica ,

$$P_n = 3T_{n-1} + n$$

apresentada por GUNDLACH, 1992.

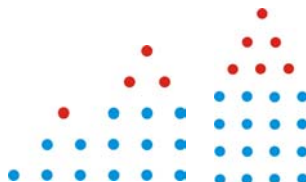


Fig 8. Segunda forma

$$P_n = Q_n + T_{n-1}$$

apresentada por GUNDLACH, 1992

Números hexagonais

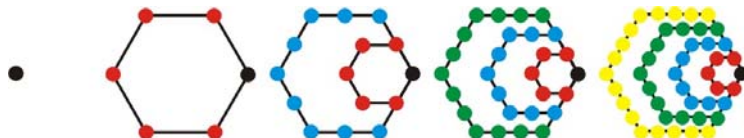


Fig 9 – Números hexagonais

$P_1 = 1$	-----	$P_1 = 1$
$P_2 = 1 + 5$	-----	$P_2 = 6$
$P_3 = 1 + 5 + 9$	-----	$P_3 = 15$
$P_4 = 1 + 5 + 9 + 13$	-----	$P_4 = 28$
\vdots		\vdots
$P_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 3n - 2$	-----	$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$



Números hexagonais

Para ilustrar, tomemos $n = 5$. A soma dos dez primeiros termos da progressão aritmética é:

$$S_{10} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = \frac{4 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5}{2} = \frac{100 - 10}{2} = 45$$

que é o quinto número hexagonal.



Números hexagonais

Para ilustrar, tomemos $n = 5$. A soma dos dez primeiros termos da progressão aritmética é:

$$S_{10} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = \frac{4 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5}{2} = \frac{100 - 10}{2} = 45$$

que é o quinto número hexagonal.

Números hexagonais



Figura 11 - $H_n = 1 + 6T_{n-1} = 1 - 3n + 3n^2$

Generalização dos números poligonais

- Gundlach (1992) cita que, embora a generalização não apareça no trabalho de Nicômaco, atribui-se a Hipsicles (180^a. C.) o resultado (aqui enunciado de forma moderna) de que o n-ésimo número K-gonal é dado por:

$$P_k^n = S_k^n = \frac{n}{2}[2 + (n-1)(k-2)] = n + \frac{n(n-1)}{2}(k-2)$$

- O décimo termo da série de números pentagonais é 145. Introduzindo n=10 e k=5 na fórmula, obtemos:

$$P_r^n = \frac{n}{2}[2 + (n-1)(k-2)] = \frac{10}{2}[2 + (10-1)(5-2)] = 5(2 + 9.3) = 5(29) = 145$$



Conclusão

- Os números poligonais têm sido estudados ao longo dos tempos por vários matemáticos. Sua representação inicial foi geométrica ou física, por pontos ou seixos, sendo exploradas as definições e afirmações baseadas na aritmética. Nos tempos mais atuais, foram introduzidos os simbolismos algébricos para expressar ou demonstrar vários resultados das regularidades observadas.
- Processos matemáticos envolvidos no estudo de números poligonais: a procura de regularidades e invariantes, a generalização, a formalização, a abstração, a comunicação de idéias matemáticas, a modelagem e a demonstração que necessitam ser evidenciados para que o aluno se conscientize de sua aprendizagem
- A exploração dos números poligonais é uma excelente atividade de investigação matemática, que pode ser levada para a sala de aula desde as séries iniciais do ensino fundamental.



Referências Bibliográficas

- BOYER, C. B. **História da Matemática**, tradução Elza F. Gomide- 2.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5. ed.. Lisboa: Gradativa , 2003
- CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **The book of numbers**. New York, NY: Copernicus, 1996.
- DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** (1º grau). Volume 5. .São Paulo: Editora Ática, 2003.
- DAVIS, P. J. HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradativa , 1995
- GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais**, tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992 (tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, V, 1)
- HUNTLEY, H.E. **A Divina Proporção**.Brasília: Editora Universidade de Brasília. 1995.
- ENZENSBERG, H. M. **O Diabo dos Números**. São Paulo: Companhia das Letras, 1997
- ERNEST, P..Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, LEAL, PONTE (Eds). **Investigar para aprender matemática**, (PP.25 – 48). Lisboa: Projeto MPT e APM, 1996.
- FROTA, Maria Clara R. **Experiência Matemática e Investigação Matemática**.
- IMENES, L. M. e LELLIS, M. **Matemática** (1º grau). Volume 5. São Paulo: Editora Scipione , 1997
- MLODINOW, L.. **A Janela de Euclides**: história da geometria: duas linhas paralelas ao hiperespaço - São Paulo: Geração Editorial, 2004.
- PIETENPOL, J. L. **Números Triangulares Quadrados**. *Amer. Math. 169 mensais* , 168-169, 1962 in, <http://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html>
- PONTE, João Pedro da et al. **Investigações matemáticas na sala de aula** – Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- PONTE, J. P . **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat 2003(CD-Rom, pp 25- 39) Lisboa: APM, 2003.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático: tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo, 2ª reimpressão – Rio de Janeiro:Interciência, 1995.